De besliskunde en haar toepassingen

Kriens, J.

Publication date:
1969

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Link to publication in Tilburg University Research Portal

Citation for published version (APA):
Kriens, J. (1969). *De besliskunde en haar toepassingen*. (EIT Research Memorandum). Stichting Economisch Instituut Tilburg.

EIT
4

Prof. Drs. J. Kriens

De besliskunde en haar toepassingen

ECONOMISCH INSTITUUT TILBURG
ECONOMETRISCHE AFDELING

DE BESLISKUNDE EN HAAR TOEPASSINGEN [1])

door

J. Kriens

Tilburg

Besliskunde kan worden omschreven als de studie die zich bezighoudt met het oplossen van beslissingsproblemen door eerst een wiskundig model van de beslissingssituatie te maken, vervolgens het uit het beslissingsprobleem voortgekomen wiskundige optimumprobleem uit te rekenen en tenslotte de gevonden oplossing terug te vertalen in de taal van de beslissingssituatie. Het is duidelijk dat diegenen, die de wiskunde alleen beoefenen vanwege de esthetische bekoring die ervan uit kan gaan, hier niet in de eerste plaats aan hun trekken komen. Naast het plezier dat de beoefenaar kan beleven aan het opstellen van wiskundige modellen voor de meest uiteenlopende beslissingssituaties, is een belangrijke maatstaf voor succesvol besliskundig onderzoek of men er in slaagt de beslissingsproblemen beter op te lossen dan langs andere weg mogelijk is.

De meeste toepassingen van de besliskunde liggen op industrieel terrein; daarnaast zijn er ook talrijke in de landbouw, het transportwezen, op militair terrein en vele andere gebieden. Volledigheidshalve volgen een aantal namen, waaronder verschillende problemen bekend staan: mengproblemen, produktie- en voorraadproblemen, wachttijdproblemen, toewijzingsproblemen, vervangingsproblemen. Voor de niet-ingewijden zeggen deze namen nog weinig. Daarom zullen enkele problemen wat nader bekeken worden, waarbij dan bovendien gelegenheid is, de begrenzingen van de toepasbaarheid der besliskunde te onderkennen.

1. *Een transportprobleem*

Een produkt (het mogen ook mensen zijn!) is aanwezig op een aantal plaatsen en moet vervoerd worden naar een aantal bestemmingen. De vervoerskosten per eenheid zijn evenredig met de af te

---

[1]) Voordracht gehouden in de door het Mathematisch Centrum georganiseerde Vakantiecursus 1967 over Besliskunde. De schrijver dankt drs. J. Th. van Lieshout, medewerker van de Katholieke Hogeschool te Tilburg, voor de assistentie, verleend bij het samenstellen van de tekst.

leggen afstand. Gevraagd wordt te berekenen welke hoeveelheden goederen van waar naar waar vervoerd moeten worden opdat de totale transportkosten zo klein mogelijk zijn.

Om het probleem wiskundig te kunnen formuleren onderstellen wij: er zijn m opslagplaatsen waarin resp. de hoeveelheden $a_1, \ldots, a_m$ liggen; er zijn n bestemmingsplaatsen, waar de hoeveelheden $b_1, \ldots, b_n$ nodig zijn;

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{1}$$

de vervoerskosten van één eenheid van opslagplaats i naar bestemmingsplaats j bedragen c_{ij}; er worden x_{ij} eenheden vervoerd van opslagplaats i naar bestemming j.

De totale vervoerskosten bedragen

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}; \tag{2}$$

deze moeten door geschikte keuze van de x_{ij} geminimaliseerd worden onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Men herkent in dit probleem een speciale vorm van het lineaire programmeringsprobleem. Voor niet al te grote waarden van m en n (beide bijvoorbeeld enkele honderden) kunnen problemen van deze vorm snel en zonder enige moeite op een rekenautomaat worden opgelost, hetgeen dan ook veelvuldig gebeurt.

Enige voorbeelden van transportproblemen zijn: het vervoer van grondstoffen (ruwe olie, erts) van vindplaatsen naar verwerkingsplaatsen; het transport van gereed produkt, dat in verschillende fabrieken wordt gemaakt, naar afnemers; het vervoer van lege wagens van plaatsen waar ze overtollig zijn naar plaatsen waar er behoefte aan is.

Een begrenzing van de toepasbaarheid kan ontstaan wanneer slechts een gedetailleerd model zinvol is, waardoor het probleem een zeer grote omvang krijgt. Het wordt dan moeilijk om op tijd over de juiste gegevens te beschikken, de geheugenruimte van de rekenautomaat kan te klein worden, terwijl tenslotte de berekeningen te langdurig en te kostbaar kunnen worden. Ter illustratie kan men denken aan een transportmodel voor West-Europa in het kader van de E.E.G.

Daar het wiskundig model voor het transportprobleem eenvoudiger is dan het algemene lineaire programmeringsmodel zijn de grenzen ten aanzien van de omvang bij toepassingen van het laatste model eerder bereikt dan bij het eerste. G. B. Dantzig vermeldt overigens dat met het algemene model een probleem met **30.000** vergelijkingen en meer dan een miljoen variabelen is geoptimaliseerd. [2, blz. C110]. Een indruk omtrent de toeneming van de snelheid, waarmee l.p. problemen opgelost kunnen worden, geven enkele door Koenigsberg en Buchan verstrekte tijden [1, blz. 484]: voor een probleem met 50 vergelijkingen en 100 variabelen liggen deze tussen 14 à 20 uur (I.B.M. 650 met ponskaarten) en minder dan 30 seconden (I.B.M. 7090 met ponsbanden); het desbetreffende staatje dateert uit 1963 en is derhalve sterk verouderd.

2. *Een voorraadprobleem*

Een groothandelaar verkoopt goederen uit voorraad. Wanneer het aantal in het magazijn aanwezige eenheden van een artikel daalt onder een bepaald niveau x, plaatst hij een order bij zijn leverancier, die de bestelde goederen na enige tijd, de zogenaamde levertijd, brengt. Eén van de te beantwoorden vragen luidt nu: hoe groot moet x gekozen worden?

Kiest de handelaar x hoog, dan zal hij waarschijnlijk nog eenheden in voorraad hebben, wanneer de goederen worden afgeleverd, hetgeen kosten voor het in voorraad houden van goederen impliceert, die vermeden zouden zijn bij een latere aankomst van de order. Kiest hij x laag, dan loopt hij het risico dat zijn voorraad reeds is uitgeput voordat de nieuwe goederen binnenkomen en dat er bij verdere vraag ,,neen" verkocht moet worden. Bij de bepaling van de gunstigste waarde van x worden de voorraadkosten afgewogen tegen de kosten — nadelen — van neenverkoop. Het is duidelijk dat ook de kansverdeling van de vraag naar het artikel tijdens de levertijd een belangrijke rol speelt in deze berekening.

Stelt men dat de vermijdbare voorraadkosten evenredig zijn met het aantal eenheden dat nog over is wanneer de nieuwe order binnenkomt en dat deze c_1 per stuk bedragen, dat de kosten van neenverkoop c_2 per eenheid zijn en dat de kansverdeling van de vraag v tijdens de levertijd continu is met verdelingsdichtheid $f(v)$, dan is de som van de tegen elkaar af te wegen kosten

$$c_1 \int_0^x (x - v)\, f(v)\, dv + c_2 \int_x^\infty (v - x)\, f(v)\, dv. \qquad (6)$$

Differentiatie naar x leert dat deze som minimaal is voor die waarde x^* van x, die voldoet aan

$$\int_{x^*}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = \frac{c_1}{c_1 + c_2}\,. \tag{7}$$

In woorden: x moet zodanig gekozen worden dat de kans op neenverkoop gelijk is aan $\dfrac{c_1}{c_1 + c_2}$.

Dit is één van de vele modellen die men voor in de praktijk voorkomende voorraadproblemen kan maken (vgl. voor andere modellen [3], de deeltjes 1.5 en 1.7). In het bijzonder wanneer de voorraadadministratie op een rekenautomaat geschiedt en het gaat om grote aantallen artikelen, kunnen deze modellen gebruikt worden om de voorraadbeheersing beter te laten verlopen dan op de klassieke, meer intuïtieve wijze.

De van belang zijnde constanten en verdelingsfuncties dient men te schatten, hetgeen met uitzondering van één grootheid in de meeste situaties wel mogelijk is. Deze uitzondering betreft de kosten van neenverkoop. Hierover staan veelal weinig gegevens ter beschikking, terwijl ook de mogelijkheden om te experimenteren beperkt zijn.

Hiermee is een tweede begrenzing van de toepasbaarheid der besliskunde gevonden: men moet de in het model aanwezige constanten voldoende nauwkeurig kunnen schatten. Slaagt men er in het gegeven voorbeeld niet in, c_2 te bepalen, dan is het model nog niet geheel verloren: men kan dan aan het rechterlid van vergelijking (7) een mede door intuïtie bepaalde waarde geven en vervolgens x^* berekenen. De intuïtieve benadering van het probleem is echter teruggekomen, zij het dat haar rol bescheidener is geworden.

3. *De optimale hoogte van een dijk*

Eeuwenlang is het in Nederland gebruik geweest de dijken te verhogen tot het peil van de hoogste ter plaatse bekende stormvloedstand. Reeds voor de tweede wereldoorlog realiseerde men zich bij Rijkswaterstaat dat ook met hogere dan de reeds waargenomen standen rekening moet worden gehouden.

Op grond van een mengsel van fysische en economische overwegingen kwam de in 1953 door de regering ingestelde Deltacommissie tot de conclusie dat de kans op overstroming tot een aanvaardbare waarde wordt teruggebracht, wanneer men deze in Hoek van Holland op 10^{-4} per jaar, ofwel 1 % per eeuw zou brengen.

Ondanks de aanzienlijke verbetering ten opzichte van vroegere overwegingen heeft ook deze methode nog iets onbevredigends en men zou gaarne tot een beter gefundeerde conclusie willen komen. De vraag is of deze wellicht door het afwegen van economische voor- en nadelen verkregen kan worden. Immers noch zeer hoge, noch zeer lage dijken zijn economisch verantwoord, zodat er ergens een optimum moet zijn. Een tweede is uiteraard of dit optimum ook te achterhalen is.

Wij beschouwen hier alleen een sterk vereenvoudigd geval en nemen daarbij aan dat het gaat om één afzonderlijke polder, waarbij een stormvloedstand boven het kritieke peil h_0 (welk peil niet gelijk behoeft te zijn aan de kruinhoogte) een overstroming veroorzaakt, die alle laag gelegen goederen in de polder verloren doet gaan en waarbij stormvloedstanden onder het kritieke peil geen enkele schade veroorzaken.

De vraag is nu of het huidige kritieke peil, economisch gezien, bevredigend is en zo neen, met hoeveel het dient te worden verhoogd.

Stel dat wij het kritieke peil met x meter verhogen. In veel gevallen blijken de dijkverhogingskosten i in goede benadering lineaire functies van x te zijn, zodat wij krijgen

$$i = i_0 + i_1 x, \tag{8}$$

waarin i_0 de initiële kosten zijn en i_1 de kosten per meter dijkverhoging.

Deze dijkverhogingskosten moeten worden afgewogen tegen de verminderde kansen op rampschaden. Dit is slechts mogelijk wanneer er één bepaalde maatstaf beschikbaar is, of anders gezegd, wanneer wij weten voor welk bedrag de overblijvende kansen op rampschaden in rekening moeten worden gebracht. Wij verrichten hiertoe het volgende gedachtenexperiment.

Stel dat een verzekeringsmaatschappij in staat en bereid zou zijn om de overblijvende mogelijke rampschaden te verzekeren. De maatschappij zal ieder jaar een premie vragen, die gelijk is aan de rampschadeverwachting per jaar; deze is na de verhoging met x meter

$$p\,(h_0 + x)\,w, \tag{9}$$

waarin $p(h_0 + x)$ de kans is op overschrijding van het peil $h_0 + x$ per jaar en w de totale door de dijk te beschermen waarde vertegenwoordigt (inclusief kosten van dijkherstel, indirecte schade ten gevolge van produktiederving elders, waardevermindering van de grond, etc.). Teneinde deze te betalen premies te kunnen vergelijken met i, bepalen wij de contante waarde van al deze premies. Zij δ de rentevoet per jaar, dan is de contante waarde van een over t jaar te betalen premie

$$\frac{p(h_0 + x)\, w}{\left(1 + \dfrac{\delta}{100}\right)^t},$$

of met een continue rentevoet

$$p(h_0 + x)\, w\, \mathrm{e}^{-\delta/100}. \tag{10}$$

Men kan aantonen dat voor $p(h_0 + x)$ geschreven kan worden

$$p(h_0 + x) = p_0\, \mathrm{e}^{-\lambda x}, \tag{11}$$

waarin p_0 de huidige overschrijdingskans is, welke evenals de parameter λ uit de waargenomen hoogwaterstanden kan worden geschat.

De totale verdisconteerde waarde van alle te betalen schaden is dan

$$r = \int_0^\infty p_0\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{-\delta t/100}\, \mathrm{d}t = p_0\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \frac{100}{\delta} = \frac{p_0^*\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\delta} \tag{12}$$

met $100\, p_0 = p_0^*$.

Dus bij een verhoging van de dijken met x meter worden de totale kosten om de polder te verdedigen tegen de zee

$$k = i + r = i_0 + i_1 x + \frac{p_0^*\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\delta}. \tag{13}$$

Achten we die dijkverhoging optimaal, waarbij k minimaal is, dan wordt het optimum gevonden door

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = i_1 - \frac{p_0^*\, w \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\delta} \tag{14}$$

gelijk aan nul te stellen. Dus als x^* de optimale verhoging is, geldt

$$i_1 - \frac{p_0^*\, w \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x^*}}{\delta} = 0, \tag{15}$$

of

$$x^* = \frac{1}{\lambda} \log \frac{p_0^*\, w \lambda}{\delta\, i_1}. \tag{16}$$

Op de onderstellingen die aan dit eenvoudige model ten grondslag liggen kan op velerlei wijzen kritiek worden geleverd. Zo is er geen rekening gehouden met de relatieve bodemdaling, toenemende welvaart en andere factoren. Door een enigszins gecompliceerder model zijn deze bezwaren echter te ondervangen.

Een ander punt is, dat, teneinde het optimum te kunnen berekenen, twee niet geheel gelijkwaardige grootheden zijn opgeteld; nl. enerzijds de werkelijk uit te geven kosten van dijkverhoging en anderzijds de contante waarden van toekomstige schadeverwachtingen. In de praktijk van de verzekeringsmaatschappijen is een dergelijke procedure gebruikelijk en kan de methode verdedigd worden met statistische argumenten. Als de regering deze handelwijze toepaste op alle beslissingen en er voldoende projecten van vergelijkbare omvang waren, dan was ook hier de methode zonder meer te rechtvaardigen. In werkelijkheid is dit niet het geval. Anderzijds is de fictieve verzekeringsmaatschappij alleen ingevoerd als „model'' teneinde de redenering aanschouwelijk te maken. Het model kan aanzienlijk gewijzigd worden zonder dat de resultaten erdoor veranderen.

Verder moet men ook hier om het model te kunnen gebruiken, de vereiste constanten trachten te schatten. Vooral de bepaling van de te beschermen waarde w is lastig. Het ligt voor de hand uit te gaan van de in het desbetreffende gebied aanwezige kapitaalgoederenvoorraad, vermeerderd met de aanwezige duurzame consumptiegoederen. Daarnaast moet rekening worden gehouden met de kosten van dijkherstel en bemaling, de verliezen die ontstaan door produktiederving in het betreffende gebied en elders, en moeilijk te waarderen factoren, zoals de waarden van mensenlevens, culturele goederen, e.d. Het in rekening brengen van een bepaald bedrag voor de bescherming van de aanwezige mensen is niet erg zinvol; zelfs het waarderen van een mensenleven op een, vrijwel nooit toegepast, hoog bedrag van bijv. *f* 100.000,— leidt tot verhogingen van slechts enkele centimeters. Beter is het derhalve alleen te werken met zuiver economische factoren en de aldus verkregen verhogingen te beschouwen als ondergrenzen.

De moeilijkheden welke hier ondervonden worden, zijn voor de toepassing van de besliskunde van veel ernstiger aard dan die in de twee voorafgaande voorbeelden. In feite maken ze een direct gebruik van de resultaten van het besliskundig onderzoek onmogelijk. Dit neemt niet weg dat de studie ruimschoots zijn vruchten afwierp doordat men

a) een systematische methode van aanpak verkreeg, waarmee voor alle gebieden de verschillende factoren steeds op dezelfde wijze worden afgewogen;
b) inzicht verkreeg welke factoren veel invloed hebben en welke niet;

c) inzicht verkreeg welke relevante factoren relatief het slechtst bekend zijn;
d) inzicht verkreeg in methoden waarop niet zuiver economische factoren in rekening gebracht kunnen worden.

Voor een uitvoeriger discussie verwijzen wij naar [4].

Nu wij zowel een aantal met succes gebruikte toepassingen als enkele begrenzingen van de toepasbaarheid der besliskunde hebben besproken, wil ik tenslotte de aandacht vestigen op een model, waarvan mij niet bekend is, of men er ooit met profijt mee heeft gewerkt.

4. *Een opleidingsprobleem*

Stel dat men, uitgaande van een prognose omtrent de aantallen leerlingen die een bepaald type onderwijs zullen volgen, een raming heeft gemaakt van het aantal voor dit onderwijs vereiste leerkrachten. Voor een periode van t jaar, die over k jaar begint lijkt het aantal beschikbare docenten aan de lage kant en daarom vraagt men zich af of er nieuwe docenten opgeleid moeten worden.

De opleiding duurt l jaar, waarbij wij aannemen dat l niet groter is dan k. De totale opleidingscapaciteit bedraagt N personen per jaar. Tijdens de opleiding vindt er een verloop onder de leerlingen plaats, waardoor aan het einde van het i^{de} leerjaar nog slechts een fractie p_i van het met de opleiding gestarte aantal leerlingen verder studeert. De kans dat een leerling die aan de opleiding begint na l jaar afstudeert is derhalve p_l. Ook onder de afgestudeerden is er een zeker verloop en wel blijkt de kans dat iemand j jaren na het afstuderen zich nog voor de functie beschikbaar stelt gelijk te zijn aan q_j ($j = 0, 1, \ldots$).

Men vraagt zich nu af met hoeveel leerlingen de opleiding ieder jaar moet worden begonnen. Het wordt gezien als een kostenprobleem omdat er voldoende candidaten voor de opleiding zijn te verwerven. Daar het onmogelijk is de opleiding zó te organiseren dat voor ieder jaar het beschikbare aantal leerkrachten precies gelijk is aan het vereiste aantal, aanvaardt men noodgedwongen dat er in sommige jaren overtollige docenten zijn en in andere jaren tekorten. De daardoor onstane nadelen worden in de vorm van kostenfactoren in rekening gebracht.

Als eenheid van kosten nemen we de opleidingskosten van iemand die een volledige opleiding heeft gevolgd. De opleidingskosten van iemand die na j jaar ($j < l$) afvalt zijn gelijk aan een fractie j/l van de kosteneenheid. Overtollige leerkrachten worden op een wachtlijst geplaatst en krijgen per jaar per persoon een bedrag uitgekeerd dat gelijk is aan c_1 eenheden. Een vacature die niet vervuld kan worden veroorzaakt per jaar een verlies van c_2 eenheden. [1])

Het tijdsbestek waarin het probleem loopt, beslaat $k + t$ jaren, namelijk de k jaren van de aanloopperiode en de t daaropvolgende jaren. De eerstgenoemde jaren beschouwen wij als de jaren 1 t/m k, de laatste genoemde als de jaren $k + 1$ t/m $k + t$. De bij een bepaald jaar behorende variabelen krijgen als index het nummer van het desbetreffende jaar.

Stel dat in het j^{de} jaar x_j/p_l leerlingen de opleiding beginnen ($j = 1, \ldots, k + t$).[2]) De (eventuele) tekorten in de jaren $k + 1$ t/m $k + t$ geven we aan met s_{k+1} t/m s_{k+t}, de (eventuele) aantallen overtollige krachten met r_{k+1} t/m r_{k+t}. De vereiste aantallen nieuwe docenten zijn n_{k+1} t/m n_{k+t}, de aantallen ongebruikte plaatsen van de totale opleidingscapaciteit N worden aangegeven met u_1 t/m u_{k+t}.

Tussen de ingevoerde grootheden bestaan de volgende relaties:

$$\left.\begin{array}{l}
q_{k-l}\ x_1 + q_{k-l-1}\ x_2 + \ldots + q_0\ x_{k-l+1} - r_{k+1} + s_{k+1} = n_{k+1} \\
q_{k-l+1}\ x_1 + q_{k-l}\ x_2 + \ldots + q_1\ x_{k-l+1} + q_0\, x_{k-l+2} - r_{k+2} + s_{k+2} = n_{k+2} \\
\vdots \\
q_{k-l+t-1}\, x_1 + q_{k-l+t-2}\, x_2 + \ldots + q_{t-1}\, x_{k-l+1} + \ldots + q_0\, x_{k-l+t} - r_{k+t} + s_{k+t} = n_{k+t}
\end{array}\right\} \quad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{p_l}\, x_1 + u_1 = N \\
\frac{p_1}{p_l}\, x_1 + \frac{1}{p_l}\, x_2 + u_2 = N \\
\frac{p_2}{p_l}\, x_1 + \frac{p_1}{p_l}\, x_2 + \frac{1}{p_l}\, x_3 + u_3 = N \\
\vdots \\
\frac{p_{l-1}}{p_l}\, x_1 + \frac{p_{l-2}}{p_l}\, x_2 + \ldots + \frac{1}{p_l}\, x_l + u_l = N \\
\frac{p_{l-1}}{p_l}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{p_l}\, x_{l+1} + u_{l+1} = N \\
\vdots \\
\frac{p_{l-1}}{p_l}\, x_{k+t-2l+1} + \ldots \frac{1}{p_l}\, x_{k+t-l} + u_{k+t-l} = N
\end{array}\right\} \quad (18)$$

---

[1]) De salariskosten van diegenen die in actieve dienst zijn behoeven niet als afzonderlijke term in de kostenfunctie te worden opgenomen, daar wordt genoeg over gesproken. Ook langs wiskundige weg kan het weglaten worden verdedigd.

[2]) Wij geven deze aantallen aan met x_j/p_l omdat dan, gezien het verloop tijdens de opleiding, na l jaren precies x_j personen ter beschikking komen.

De vergelijkingen (17) geven voor de perioden $k + 1$ t/m $k + t$ het verband weer tussen de variabelen waarmee de personeelssituatie beschreven wordt. De algemene vorm luidt: beschikbare krachten verminderd met overtollige krachten en vermeerderd met het tekort is gelijk aan het aantal benodigde krachten. De vergelijkingen (18) geven het verband weer tussen het aantal gebruikte en het aantal open plaatsen van de opleidingscapaciteit voor de perioden 1 t/m $k + t - l$. De opleidingscapaciteiten voor de perioden $k + t - l + 1$ t/m $k + t$ kunnen buiten beschouwing blijven omdat deze in ieder geval voldoende zijn om de in die perioden nog aanwezige leerlingen op te vangen.

De te optimaliseren functie wordt gevormd door de kosten die geminimaliseerd moeten worden. Deze kostenfunctie luidt:

$$y = \frac{1}{l\,p_l}\left\{\sum_{r=0}^{l-1} p_r\right\}\left(\sum_{j=1}^{k+t-l} x_j\right) + c_1 \sum_{j=k+1}^{k+t} r_j + c_2 \sum_{j=k+1}^{k+t} s_j, \tag{19}$$

waarin $p_0 = 1$.

Tenslotte moeten alle variablen een waarde $\geqq 0$ bezitten. Vullen wij in (17), (18) en (19) de waarden van de constanten in, dan ontstaat een — strikt genomen geheeltallig — lineair programmeringsprobleem.

Aan bovenstaande probleemstelling kan in velerlei opzichten een meer algemene vorm gegeven worden. Zo kan men rekening houden met de kosten, nodig om leerlingen te werven door één of meer extra termen in de kostenfunctie op te nemen. Verder kan men er rekening mee houden dat niet iedereen de studie in hetzelfde aantal jaren voltooit. Een andere generalisatie betreft het geval, waarin een deel van de nu opgeleide personen later zelf kan gaan opleiden waardoor de opleidingscapaciteit vergroot kan worden en men dus voor de opgeleide personen moet kiezen tussen direct inschakelen in het onderwijs of verder opleiden tot opleiders.

De vorm van het in dit voorbeeld behandelde probleem is behalve voor dit probleem representatief voor een gehele klasse van produktieproblemen, die betrekking hebben op een aantal perioden.

LITERATUUR

1. J. Buchan and E. Koenigsberg, Scientific Inventory Management, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1963).
2. G. B. Dantzig, Management Science in the World of Today and Tomorrow, Management Science 13 (1967) C 107–C 111.
3. Leergang Besliskunde, 8 delen, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1965–1969).
4. Rapport Deltacommissie, Bijdrage II.2, D. van Dantzig en J. Kriens, Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden, Staatsdrukkerij- en Uitgeverijbedrijf (1960).

Overdruk uit ,Euclides', jaargang 44, 1968–1969, nr VIII, 1 mei 1969
E.I.T. 1969